



Lesson Study NL

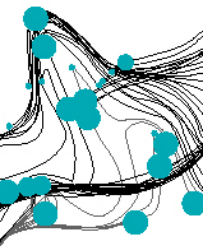
Wat is een eerlijke verdeling?

Samenwerking tussen wetenschappelijk en voortgezet onderwijs in de vorm van Lesson Study op het gebied van Speltheorie



Aafke Elschot
Tom Coenen
Nellie Verhoef





Even voorstellen

Aafke Elschot

- Docent wiskunde
- Onderzoeker DOT/CoL (NWO gesubsidieerd)

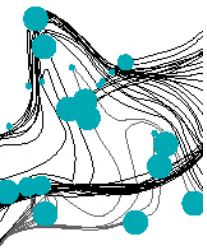
Tom Coenen

- Docent wiskunde
- Vakdidacticus aan de UT
- Projectleider DOT/CoL

Nellie Verhoef

- Vakdidacticus en onderzoeker aan de UT



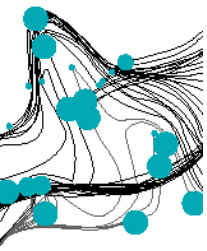


Opdracht les 1

Er is een bedrijf failliet gegaan en er zijn vier schuldeisers. Allemaal hebben ze recht op een specifiek bedrag; €2000, €2000, €5000 en €7000. Het bedrijf heeft echter nog maar €10000 om te verdelen.

Werk samen en bepaal in overleg wat volgens jullie een eerlijke verdeling van de €10000 is.



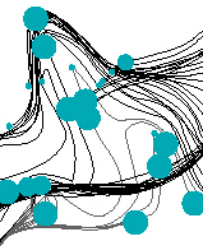


Opdracht les 1

Er zijn veel antwoorden mogelijk die prima te verdedigen zijn, zoals:

- Het geld gelijkmatig blijven verdelen over de schuldeisers, maar nooit meer geven dan geëist wordt:
(€2000, €2000, €3000, €3000)
- Het tekort gelijkmatig verdelen over de schuldeisers:
(€500, €500, €3500, €5500)
- Het bedrag evenredig aan het verschuldigde bedrag verdelen, dus 2:2:5:7.
(€1250, €1250, €3125, €4375)
- Zo veel mogelijk mensen tevreden maken
(€2000, €2000, €5000, €1000)



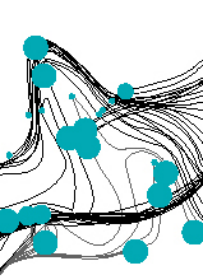


Uit de praktijk

Categorisatie van observaties met behulp van *Gravemeijers' levels of activity*

Niveau van activiteiten				
Case-student	Task setting	Referential	General	Formal
A	“Wat is nu de echte oplossing?”	“Het zou naar verhoudingen verdeeld moeten worden, dat is de enige eerlijke oplossing.”	geen	Geen
B	Schrijft op wat er total te verdelen is wat er te kort is per eis.	“Iedereen zou hetzelfde percentage moeten krijgen vergeleken met wat er total te verdelen is en wat er total geclaimd wordt.”	geen	“Er zijn heel veel oplossingen. Je kan er voor kiezen iemand niks te geven, of gelijke verliezen, of naar verhoudingen of”
C	Telt alle eisen bij elkaar op en komt tot de conclusie dat er te weinig is om iedereen zijn eis uit te betalen.	“Aangezien mijn eis het grootste is, heb ik het meeste risico gelopen en zou ik het meeste terug moeten krijgen in verhouding.”	“Het hangt er vanaf vanuit welke kant je het probleem bekijkt wat eerlijk is. Dit is anders vanuit de eisers dan vanuit het bedrijf dat failliet ging.”	geen





Waarom speltheorie?

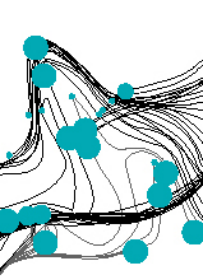
Speltheorie is een tak van wiskunde die vaak onbekend is bij leerlingen, maar wel leuk gevonden wordt.

Speltheorie heeft in tegenstelling tot veel andere takken van de wiskunde vaak meerdere goede antwoorden.

Het is een onderwerp binnen de wiskunde dat niet in het standaard curriculum zit maar zeer geschikt is voor het keuzeonderwerp bij wiskunde D, maar ook voor projectdagen bij zowel 4^e als 5^e klas wiskunde A en B.

Expertise aanwezig binnen de faculteit Wiskunde van de UT voor de nodige verdieping



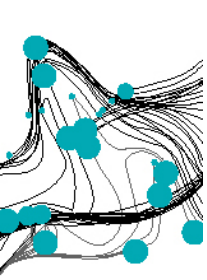


Het Lesson Study team

Samenwerking tussen (wiskunde-)docenten uit de regio, een onderzoeker en vakdidacticus van de UT en een medewerker (expert) van de faculteit wiskunde van de UT.

- 3 wiskunde docenten uit het VO
- Docent onderzoeker
- Vakdidacticus
- Expert speltheorie van de UT



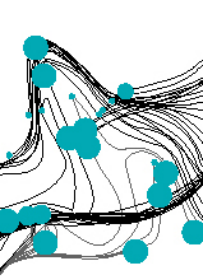


Het lesmateriaal

Als Lesson Study team proberen we een lessenserie ontwikkelen waarin:

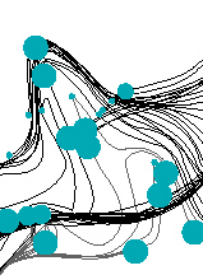
- Leerlingen enthousiast gemaakt worden voor wiskunde
- Leerlingen het praktische nut van wiskunde ervaren
- Leerlingen zien wat (een vorm van) wiskundig modelleren inhoudt en hun eigen vaardigheid hierin laten toenemen
- Leerlingen een stap dichterbij aansluiting met het WO komen





Het Lesson Study team



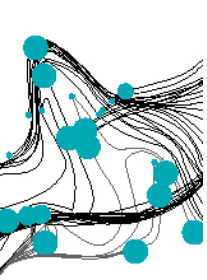


Het Lesson Study proces



1. Het onderwerp in deze cyclus was reeds bepaald.
2. Inventariseren wat iedere deelnemer van de LS verwacht.
3. Ontwerpen van de lessen: wat leggen we uit, welke opdrachten geven we de leerlingen
4. Inventariseren: wat verwachten we dat de leerlingen gaan doen bij opdrachten, welke antwoorden verwachten we bij de opdrachten. Is dat ook wat we willen?
5. Puntjes op de i bij de lesontwerpen en het uitvoeren ervan.
6. De lessen worden geobserveerd door de deelnemers. De focus ligt hierbij op de leerlingen, niet op de docent!
7. Nabespreking van de les vindt zo snel mogelijk plaats: wat liep anders dan verwacht en waarom is dit het geval?
8. Herzien van de lessen: opnieuw geven en observeren.



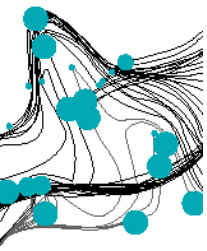


De waarde van het team



- Verschillende visies:
 - De docenten kunnen (hun) leerlingen inschatten
 - De expert staat ver boven de stof en weet de moeilijkheden die in het WO ervaren worden
 - De vakdidacticus heeft een breder zicht op vakdidactische aspecten en voert deze in
 - De onderzoeker legt focus op het verzamelen van nuttige informatie om resultaten te onderbouwen
- Expertise op verschillende vlakken
- Samenwerking en discussie



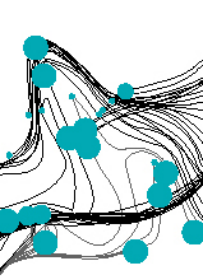


Opdracht les 2

Er zijn twee eisers. Persoon A claimt 50 euro en persoon B claimt 70 euro. Er is in totaal 80 euro te verdelen.

Wat zou persoon A minimaal moeten krijgen? En wat zou persoon B minimaal moeten krijgen? Leg ook uit waarom.





Opdracht les 2

Er zijn twee eisers. Persoon A claimt 50 euro en persoon B claimt 70 euro. Er is in totaal 80 euro te verdelen.

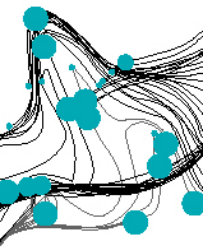
Wat zou persoon A minimaal moeten krijgen? En wat zou persoon B minimaal moeten krijgen? Leg ook uit waarom.

Uitgangspunt: Een persoon kan nooit meer krijgen dan hij eist.

Als persoon B maximaal 70 krijgt, is er nog 10 euro voor persoon A. Persoon A krijgt dus minimaal 10 euro.

Als persoon A maximaal 50 krijgt, is er nog 30 euro over voor persoon B. Persoon B krijgt dus minimaal 30 euro





Uit de praktijk



Case student A:

Verhouding:

A minimaal $33 \frac{1}{3}$ euro

B minimaal $46 \frac{2}{3}$ euro

Case student B:

A minimaal 25 (de helft van de eis)

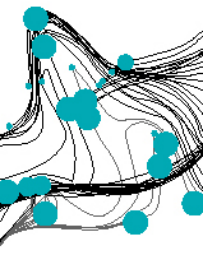
B minimaal 35 (de helft van de eis)

Case student C:

A minimaal 10, want B maximaal 70

B minimaal 30, want A maximaal 50





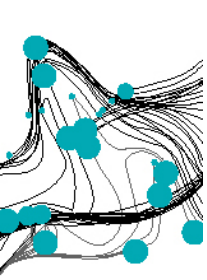
Opdracht les 2



Er zijn drie eisers. Persoon A claimt 40 euro, persoon B claimt 20 euro en persoon C claimt 30 euro. Er is in totaal 70 euro te verdelen.

Bekijk voor alle personen wat zij minimaal en maximaal krijgen. Kijk ook naar het samenwerken van 2 personen.





Opdracht les 2



Er zijn drie eisers. Persoon A claimt 40 euro, persoon B claimt 20 euro en persoon C claimt 30 euro. Er is in totaal 70 euro te verdelen.

Bekijk voor alle personen wat zij minimaal en maximaal krijgen. Kijk ook naar het samenwerken van 2 personen.

Persoon A krijgt minimaal 20 euro.

Persoon B krijgt minimaal 0 euro.

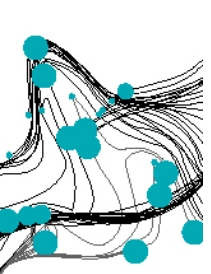
Persoon C krijgt minimaal 10 euro.

Personen A en B krijgen minimaal 40 euro samen.

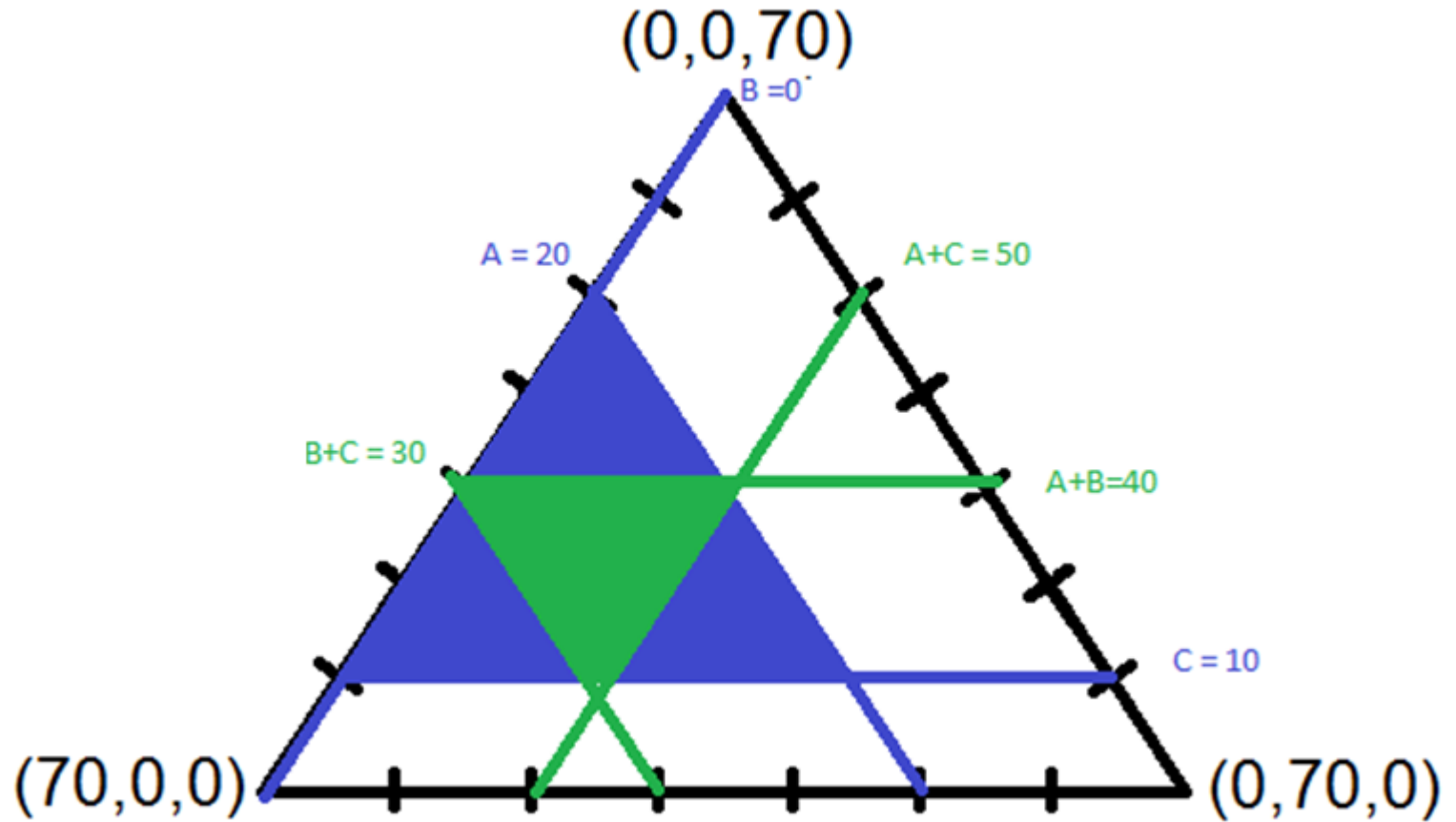
Personen B en C krijgen minimaal 30 euro samen.

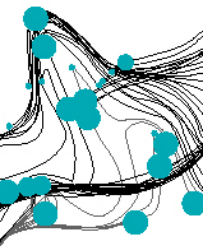
Personen A en C krijgen minimaal 50 euro samen.





Opdracht les 2

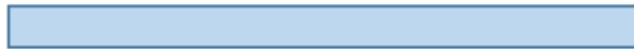




Opdracht les 3

Twee mensen houden een dropveter vast. Persoon A claimt dat hij de hele dropveter kan opeten en persoon B wil maar de helft van de dropveter hebben.

Hoe zou je de dropveter in jouw ogen nu eerlijk kunnen verdelen?

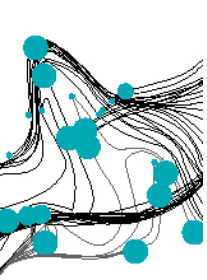


Claim persoon A



Claim Persoon B





Opdracht les 3



Twee mensen houden een dropveter vast. Persoon A claimt dat hij de hele dropveter kan opeten en persoon B wil maar de helft van de dropveter hebben.

Hoe zou je de dropveter in jouw ogen nu eerlijk kunnen verdelen?



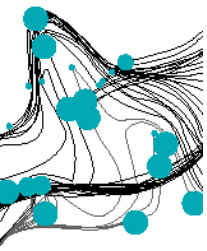
Claim persoon A



Claim Persoon B

Minimaal persoon A: de helft
Minimaal persoon B: niks

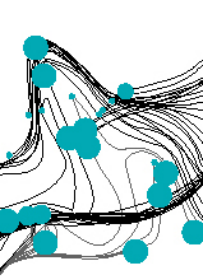




Uit de praktijk

- Case student A: Allebei de helft van de dropveter
- Case student B: Allebei de helft van de dropveter
- Case student C: Persoon A krijgt $\frac{2}{3}$ van de dropveter
Persoon B krijgt $\frac{1}{3}$ van de dropveter





Een beetje geschiedenis

In de Babylonische Talmud (een collectie Joodse religieuze wetboeken geschreven in de eerste vijf eeuwen na Christus) kun je de volgende Mishna lezen ¹.

“Wanneer een man, die getrouwd is met drie vrouwen, overlijdt en hij heeft aan de eerste vrouw een schuld van 100 zuz, aan de tweede vrouw een schuld van 200 zuz en aan de derde vrouw een schuld van 300 zuz, en hij bezit bij zijn overlijden slechts 100 zuz, dan krijgt elk van de vrouwen een gelijk deel van het bedrag.

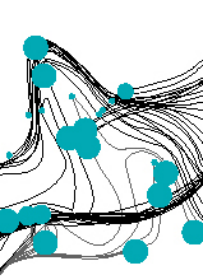
Wanneer zijn nalatenschap uit 200 zuz bestaat, dan krijgt de eerste vrouw 50 zuz terwijl de tweede en derde vrouw elk 75 zuz krijgen.

Wanneer zijn nalatenschap uit 300 zuz bestaat, dan krijgt de eerste vrouw 50 zuz, de tweede krijgt 100 zuz en de derde 150 zuz.

Evenzo geldt dat wanneer drie personen bijgedragen hebben aan een gezamenlijk fonds en gezamenlijk winst gemaakt hebben of verlies hebben geleden, dan wordt de winst of het verlies op dezelfde manier verdeeld.”

¹Vrij vertaald naar Kethuboth, Fol. 93a, Babylonian Talmud, I, Epstein, ed., 1935

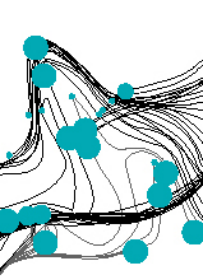




Nucleolus

1. Zet alle claims van klein naar groot
2. Geef iedereen een gelijke verdeling tot de laagste eiser de helft van de eis heeft of het totaal verdeeld is.
3. Laat de laagste eiser eruit en verdeel het resterende bedrag in gelijke delen over de overige eisers tot de nieuwe laagste eiser de helft heeft.
4. Ga hier net zo lang mee door tot iedereen de helft van zijn eis heeft of het geld verdeeld is.
5. Kijk nu naar de hoogste eiser en laat zijn verlies hetzelfde zijn als het verlies van de volgende hoogste eiser.
6. Verdeel het overige bedrag gelijk over de hoogste eisers totdat er gelijke verliezen zijn met de volgende hoogste eiser.
7. Ga hier net zo lang mee door tot al het geld verdeeld is.



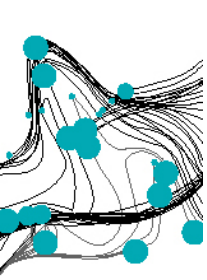


Van theorie naar modelleren

De leerlingen hebben nu verschillende aanpakken gezien die allemaal als eerlijk te verdedigen zijn.

- Winst gelijk verdelen (met maximaal de eis)
- Verlies gelijk verdelen
- Naar verhouding verdelen
- Nucleolus



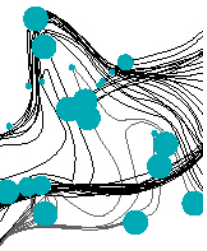


Van theorie naar modelleren

De leerlingen hebben nu verschillende aanpakken gezien die allemaal als eerlijk te verdedigen zijn.

- Wat is nu de impact van de grootte van de laatste claim?
- Wat gebeurt er als het bedrijf meer of minder geld te verdelen had?
- Wat zou er gebeuren als er zich nog een schuldeiser zou melden?



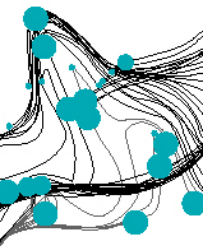


Opdracht les 4

Een groep musea biedt een museumkaart aan. Uiteraard is de prijs van deze kaart lager dan de som van de toegangsprijzen van de afzonderlijke musea.

Onderzoek hoe de opbrengst (dat gelijk is aan de prijs) van elke verkochte kaart moet worden verdeeld over de samenwerkende musea.





Opdracht les 4

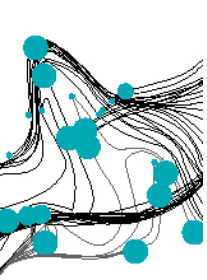
Een groep musea biedt een museumkaart aan. Uiteraard is de prijs van deze kaart lager dan de som van de toegangsprijzen van de afzonderlijke musea.

Onderzoek hoe de opbrengst (dat gelijk is aan de prijs) van elke verkochte kaart moet worden verdeeld over de samenwerkende musea.

Neem 3 musea, de kaartprijs van 10 euro en de individuele entreprijs van 3, 5 en 7 euro. Hoe zou je nu de geleerde stof kunnen toepassen op deze situatie?

Hoe veranderen de oplossingen die je hebt gevonden als er een getal veranderd? Beschrijf dat. Onderzoek uitgebreid wat de invloed van het veranderen van de getallen is op de verdelingen.



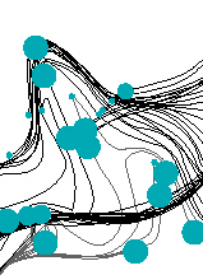


Uit de praktijk

Groepje 1:

- Begint met vier musea en maakt een vierkant voor visualisatie. Komen erachter dat dat niet werkt en gaan met drie musea aan de slag
- Er wordt een kern getekend in driehoek
- Er wordt een optimistische oplossing, pessimistische oplossing, verhoudingen en Nucleolus berekend voor waarden die door groepje zijn gekozen (5, 20, 25) met 40 te verdelen.
- Oplossingen worden in de kern getekend.



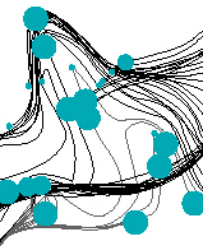


Uit de praktijk

Groepje 4:

- Groepje gebruikt de waarden gegeven door docent. (3, 5 en 7) met 10 euro te verdelen.
- Er wordt een kern getekend in driehoek
- Er wordt een optimistische oplossing, pessimistische oplossing, verhoudingen en Nucleolus berekend.
- Er wordt veel beredeneerd wat er gebeurt als iemand zijn prijs aanpast in realiteit: Als ene museum prijs verhoogt dan doen anderen dat ook.
- Claims aangepast naar (3, 5 en 10)
- Komen met conclusies:
 - Optimistisch: Bij verhoging van de prijs van een museum die niet al zijn geld krijgt, blijft de oplossing gelijk. Als de laagste eiser zijn prijs verhoogt krijgt hij meer.
 - Pessimistisch: Als iemand zijn prijs verhoogt, krijgt hij meer want het verlies moet gelijk zijn. Als die verhoging groot genoeg is, dan is dit gelijk aan de Nucleolus.





Eindopdracht

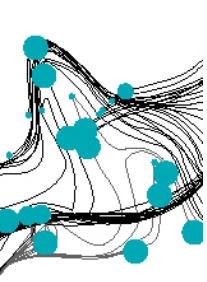


Een groep van 3 leerlingen heeft in een project samengewerkt en allemaal vinden ze dat ze goed werk hebben geleverd. Het is echter duidelijk dat ze niet allemaal evenveel werk hebben gedaan, dus het cijfer dat ze zichzelf zouden tobedelen verschilt. De docent was echter minder te spreken over hun werk en heeft besloten ze een totaalcijfer te geven. De leerlingen mogen nu zelf het cijfer voor iedere afzonderlijke deelnemer aan het project bepalen, waarbij het totaal van hun cijfers opgeteld dus gelijk moet zijn aan het totaalcijfer dat de docent heeft gegeven.

Analyseer de hierboven beschreven situatie met behulp van de speltheorie die de afgelopen lessen behandeld is.

Werk alles uit in een verslag en vermeld aan het eind welk groeps cijfer jullie vinden dat jullie verdienen en hoe jullie dan per persoon het cijfer toe zouden kennen. Onderbouw waarom jullie dit groeps cijfer zouden verdienen en waarom het verdeeld zou worden op de wijze die jullie beschrijven.





De opbrengsten voor het team

Lesmateriaal dat direct toepasbaar is in de les

Professionele ontwikkeling van de docent:

- Inzicht in het denken van leerlingen
- Eigen kennis over huidig wiskundig onderzoek vergroten.

Aansluiting naar WO wordt bevorderd

Het is gewoon leuk!

